Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas II (MA-1112)
Abril-Julio 2008

Nombre: ______________________________

Carné: _______________ Sección: _____

2^{do} Examen Parcial (30 %)
Duración: 1h 50min
Tipo B

Justifique todas sus respuestas

Pregunta 1. (6 puntos) Calcule el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar alrededor de del eje X la región acotada por $x^2 = y - 2$, $2y - x - 2 = 0$, $x = 0$, $x = 1$.

Pregunta 2. (6 puntos) Demuestre la siguiente identidad:

$$\operatorname{senh}(2x) = 2\operatorname{senh}(x)\cosh(x)$$

Pregunta 3. Calcule las siguientes integrales

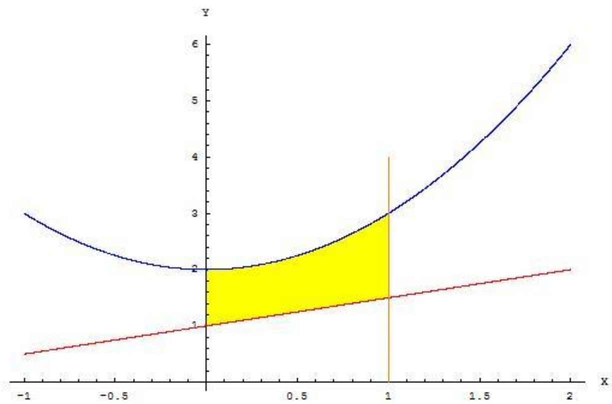
a) (6 puntos) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+e^{-x}}$

b) (6 puntos) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{(\ln|x|)^2 - 1}}$

c) (6 puntos) $\displaystyle\int \frac{6x-8}{3x^2+2}dx$

Soluciones

1) La región a rotar se indica a continuación



Por el método de las arandelas es claro cuales son los límites de integración. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_0^1\left((x^2+2)^2-\left(\frac{x}{2}+1\right)^2\right)dx=\pi\int_0^1\left(x^4+4x^2+4-\frac{x^2}{4}-x-1\right)dx \\ &= \pi\int_0^1\left(x^4+\frac{15}{4}x^2-x+3\right)dx=\pi\left(\frac{x^5}{5}+\frac{5x^3}{4}-\frac{x^2}{2}+3x\Big|_0^1\right) \\ &= \pi\left(\frac{1}{5}+\frac{5}{4}-\frac{1}{2}+3\right)=\frac{79}{20}\pi \end{aligned}$$

El volumen por el método de los cascarones es algo más complicado de plantear:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi\int_1^{\frac{3}{2}}y(2y-2)dy+2\pi\int_{\frac{3}{2}}^2 y(1)dy+2\pi\int_2^3 y(1-\sqrt{y-2})dy \\ &= \frac{2}{3}\pi+\frac{7}{4}\pi+\frac{23}{15}\pi=\frac{79}{20}\pi \end{aligned}$$

2) Recordamos que

$$\operatorname{senh}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\ \text{ y }\ \cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}.$$

Entonces

$$2\operatorname{senh}(x)\cosh(x) = 2\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)=\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}=\operatorname{senh}(2x),$$

donde usamos que $(x-y)(x+y)=x^2-y^2$ y $e^ae^b=e^{a+b}$.

3) a) Sea $I = \int \frac{dx}{1+e^{-x}}$. Multiplicando en el numerador y denominador por e^x obtenemos

$$I = \int \frac{e^x dx}{e^x + e^x e^{-x}} = \int \frac{e^x dx}{e^x + e^x e^{-x}} = \int \frac{e^x dx}{e^x + 1}.$$

Ahora usamos la sustitución $u = 1 + e^x$, $du = e^x dx$

$$I = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|1 + e^x| + C = \ln(1 + e^x) + C$$

Alternativamente se ha podido resolver $\int \frac{e^x dx}{e^x+1}$ haciendo primero la sustitución $u = e^x$ y luego $v = 1 + u$.

b) Sea $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{(\ln|x|)^2-1}}$. Usamos la sustitución $u = ln|x|$, $du = \frac{dx}{x}$

$$I = \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = \cosh^{-1}(u) + C = \cosh^{-1}(\ln|x|) + C$$

c) Sea $I = \int \frac{6x-8}{3x^2+2} dx$. Entonces

$$I = \int \frac{6x}{3x^2 + 2} dx - \int \frac{8}{3x^2 + 2} dx = \int \frac{6x}{3x^2 + 2} dx - \frac{8}{2} \int \frac{dx}{\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} x\right)^2 + 1}.$$

En la primera integral usamos la sustitución $u = 3x^2 + 2$, $du = 6x dx$, en la segunda $v = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} x$, $dv = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} dx$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{du}{u} - 4\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \int \frac{dv}{v^2 + 1} = \ln|u| - \frac{4\sqrt{6}}{3} \arctan(v) + C \\ &= \ln|3x^2 + 2| - \frac{4\sqrt{6}}{3} \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} x\right) + C = \ln(3x^2 + 2) - \frac{4\sqrt{6}}{3} \arctan\left(\frac{\sqrt{6}}{2} x\right) + C \end{aligned}$$